

Kleine Knobelkiste 3

Rechnen und Raten, Schätzen und Verzählen

Auch in dieser Knobelkiste gibt es wieder interessante Rätsel zu lösen. Dieses Mal ist ein wenig Rechnerei ganz hilfreich. Allerdings sind manche Aufgaben einfacher als sie auf den ersten Blick vielleicht aussehen mögen, andere hingegen haben es wahrlich "in sich".

Ein Sack voller Falschgeldmünzen

In zehn Geldsäcken befinden sich lauter gleiche Münzen. In einem dieser Geldsäcke sind jedoch alle Münzen Falschprägungen. Sie wissen, dass eine echte Münze zehn Gramm wiegt, eine falsche jedoch um ein Gramm mehr oder auch weniger. Mit Hilfe einer Dezimalwaage (also keine Balkenwaage) sollen Sie herausfinden, in welchem Sack die falschen Münzen sind und Sie sollen ermitteln, ob diese Münzen schwerer oder leichter sind als die echten Münzen. Wie oft müssen Sie mindestens wiegen? Können Sie Ihre Antwort auch beweisen?

Das Seil verlängern

Wenn man ein Seil um einen Tennisballs legt (Durchmesser zwischen 6,54 cm und 6,84 cm), die Länge des Seils um 1 m verlängert und dann wieder kreisförmig um den Tennisball legt, dann beträgt der Abstand des Seils zur Oberfläche des Tennisballs ziemlich genau 15,9 cm. Wenn man nun theoretisch ein Seil um den Äquator der Erde (ca. 40.000 km) legt, und auch dieses Seil um 1 m verlängert und dann wieder gleichmäßig um den Erdäquator legt, wie weit ist dieses verlängerte Seil dann von der Erdoberfläche entfernt (Abstand zur Oberfläche)?

Die zwei Sportwagen

Ein roter Porsche und ein gelber Ferrari rasen über die Autobahn. Der rote Porsche überholt den gelben Ferrari. Der gelbe Ferrari folgt dem Porsche daraufhin mit einem konstanten Abstand von 20 Metern. Welches Auto fährt nun schneller: der vorweg fahrende rote Porsche oder der hinterher fahrende gelbe Ferrari?

Absolute Durchschnittsgeschwindigkeit

Auf einem Rundkurs von 4,75 km fährt der Rennfahrer seine Trainingsrunden. Am Ende der Trainingsrunde hat er eine Durchschnittsgeschwindigkeit von genau 100 km/h erreicht. Wie schnell müsste der Rennfahrer in einer zweiten Runde fahren, um für beide Testfahrten zusammen eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 200 km/h zu erreichen? Denkanstoss: Wenn Sie zweimal hintereinander dieselbe 2 m hohe Leiter besteigen, dann beträgt ihre absolut erreichte Höhe nicht 4 m, sondern immer noch 2 m - vorausgesetzt, die Leiter wird nicht auf die erreichte Höhe angehoben.

Lösung:
Ein Sack voller Falschgeldmünzen

Notwendig ist genau ein Wiegevorgang. Dabei numeriert* man die Säcke von 1 bis 10 durch und nimmt dann aus jedem Sack genau so viele Münzen heraus, wie es der Nummer des jeweiligen Sackes entspricht. Einfacher gesagt: Sie nehmen aus dem ersten Sack 1 Münze, aus dem zweiten Sack 2 Münzen, aus dem dritten Sack 3 Münzen usw. Am Ende haben Sie 55 Münzen, die nur dann 550 g wiegen würden, wenn keine Falschgeldmünzen dabei sind. Zeigt die Waage nun aber 551 g, dann kann der Sack mit den falschen Münzen nur Sack 1 sein, wobei die falschen Münzen dann schwerer sein müssten; zeigt die Waage nur 549 g, dann wären die falschen Münzen (in Sack 1) leichter: $n = |x - ((10+1) \cdot (10/2)) \cdot 10|$ wobei x die angezeigte Grammzahl ist und n die Nummer des Sackes. Als kleine Zusatzaufgabe können Sie nun noch überlegen, wie sich diese Vorgehensweise mathematisch korrekt beschreiben lässt ... *hier bevorzuge ich die alte Schreibweise

Lösung:
Das Seil verlängern

Das um 1 m verlängerte Seil wäre von der Erdoberfläche ziemlich genau 15,9 cm entfernt. Nimmt man ein 1-m-Seil und legt es als Kreis aus, so entspricht die Länge dem Umfang. Da $U = d \cdot \pi$ ist, beträgt der Durchmesser d dieses Seilkreises 31,847 cm (für $\pi = 3,14$), womit der Radius r dann ca. 15,9 cm beträgt und dem Abstand zur Oberfläche des innen liegenden Körpers entspricht. Der Durchmesser des innen liegenden Körpers (beim einfachen Seilkreis eben der *dimensionslose* Mittelpunkt mit Durchmesser 0) ist vom Durchmesser des äußeren Körpers zu subtrahieren und durch 2 zu teilen. Einfacher mit Zahlen: Das Seil liegt um einen Körper mit 1 m Durchmesser und hat damit eine Länge von 3,14 m. Nun wird das Seil um 1 m auf 4,14 verlängert und wieder gleichmäßig um denselben Körper mit 1 m Durchmesser gelegt. Der Durchmesser des Seilkreises beträgt nun 1,31847 m ($d = 4,14 / 3,14$). Da der innere Kreis genau in der Mitte des Außenkreises liegt, beträgt der Abstand des Außenkreises zum Innenkreis $(1,31847 \text{ m} - 1 \text{ m}) / 2 = 0,159 \text{ m}$, und damit also 15,9 cm.

Lösung:
Die zwei Sportwagen

Bei der Betrachtung geht es nicht um die absolute Höchstgeschwindigkeit, die die Fahrzeuge fahren können, sondern um die momentane Situation. Da der Abstand zwischen beiden Fahrzeugen konstant bleibt, so muss das hinterherfahrende Fahrzeug mit derselben Geschwindigkeit unterwegs sein wie das vorausfahrende, da sich sonst der Abstand verringern oder vergrößern würde. Beachten Sie, dass der Geschwindigkeitsvektor der Quotient aus Weg und Zeit ist, bei Betrachtung von zwei Geschwindigkeitsvektoren also Δs und Δt .

Lösung:
Absolute Durchschnittsgeschwindigkeit

Die Geschwindigkeit ist der Quotient aus Weg und Zeit, also $v [\text{km/h}] = s [\text{km}] / t [\text{h}]$. Für die Testrunde mit der Wegstrecke von 4,75 km braucht der Rennfahrer bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 100 km/h also 0,0475 h (2'51"). Bei doppelter Durchschnittsgeschwindigkeit braucht der Fahrer nur die Hälfte der Zeit. Bilden wir doch einfach einmal das arithmetische Mittel aus 100 km/h und 300 km/h, womit wir dann bei 200 km/h für die beiden Runden ankämen. Das scheint irgendwie plausibel zu sein, doch rechnen wir hier noch einmal nach: für die erste Runde hat der

Fahrer schon 2'51" gebraucht. Fährt er die zweite Runde mit 300 km/h, so braucht er dafür 57 Sekunden. Insgesamt hat der Rennfahrer damit aber 3'48" gebraucht, wobei er insgesamt 9,5 km gefahren ist. Die Durchschnittsgeschwindigkeit wäre also ca. 150 km/h, denn $v = 9,5 \text{ km} / 0,063 \text{ h}$. Aber die Wegstrecke s ist als absolute Wegstrecke gesetzt (4,75 km), wobei s im Grunde irrelevant ist. Wenn Sie die erste Runde mit 100 km/h zurücklegen, gilt für die benötigte Zeit $t = 1/2 \cdot s / 100 \text{ km/h} \rightarrow t = 1/200 \text{ km/h} \cdot s$. Um für beide Runden zusammen eine Durchschnittsgeschwindigkeit vom 200 km/h zu erreichen, müssten Sie ebenfalls die (Gesamt-)Zeit $t = s / 200 \text{ km/h} \rightarrow t = 1/200 \text{ km/h} \cdot s$ benötigen. Für die zweite Runde dürften Sie also nur noch 0 (Null) Sekunden brauchen, was nicht nur praktisch nicht möglich sein dürfte ...

Verwendungshinweis

Die unveränderte Weitergabe dieses Dokumentes ist gestattet. Auch die Verwendung einzelner Passagen oder Graphiken aus diesem Dokument ist unter Berücksichtigung der Quellenangabe erlaubt. Nicht gestattet ist die Verbreitung des Dokumentes oder einzelner Passagen bzw. Graphiken aus diesem Dokument im Zusammenhang mit Inhalten, Darstellungen, Aufforderungen und Äußerungen sexistischer, rassistischer, volksverhetzender, religiös diskriminierender oder sonst gesetzeswidriger Ausprägung. *Frank Lencioni*

E-Mail: Frank@Lencioni.de / Web: <http://Frank.Lencioni.de>